# 13 МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ CТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ

*Математика говорит на одном языке со всеми сопутствующими искусствами и вообще со всеми созданиями повседневной жизни*, *на одном языке форм*, *в котором одновременно и проявляются и скрываются глубочайшие возможности духовной стихии.*

Освальд ШПЕНГЛЕР

Ранее были рассмотрены два класса систем с распределенными параметрами – процессы переноса и волновые процессы. Для моделей первого класса, например, для уравнения теплопроводности, характерен выход системы со временем в положение равновесия, являющееся функцией пространственных координат. Для моделей второго класса, например, для уравнения колебания струны, наблюдаются колебания вокруг положения равновесия. В данной Главе исследуются различные стационарные системы, состояния которых со временем не меняется и могут пониматься положения равновесия рассмотренных ранее систем.

Описываемые ниже явления связаны с различными физическими полями. В этой связи настоящая лекция открывается описанием общего понятия векторного поля, а также его основных характеристик – ротора, потока, дивергенции и др., см. Раздел 1.

Как уже отмечалось, для процессов переноса характерно стремление системы к равновесному состоянию, если условия протекания процесса со временем не меняются. В одномерном случае оно описывается некоторым обыкновенным дифференциальным уравнением, а в многомерном случае – уравнением с частными производными. Это относится, в частности, в стационарному теплообмену, описываемому в простейшем случае уравнениями Лапласа или Пуассона, см. Раздел 2. Подобно уравнениям теплопроводности и колебания струны они являются одним из важнейших уравнений математической физики[[1]](#endnote-1).

Среди векторных полей особую роль играют потенциальные поля, определяемые градиентом некоторой функции пространственных переменных. К числу важнейших потенциальных полей относятся электростатическое и гравитационное поля, рассматриваемые соответственно в Разделах 4 и 5. Они описываются теми же уравнениями Лапласа или Пуассона относительно потенциала соответствующих полей.

Записывая оператор Лапласа в цилиндрических и сферических координатах, можно найти решения этого уравнения, обладающие цилиндрической и сферической симметрией, см. Раздел 3. В качестве приложения определяется закон изменения потенциала электростатического поля точечного заряда и заряженного провода, а также потенциала гравитационного поля, определяемого материальной точкой.

В Приложении показывается, что потенциал поля скоростей установившегося течения жидкости описывается аналогичными уравнениями. Рассматриваются также другие уравнения, связанные со стационарными системами, а также приводятся некоторые методы решения таких уравнений.

### **ЛЕКЦИЯ**

#### **1. Векторное поле**

В предшествующих главах Части II мы рассматривали нестационарные системы с распределенными параметрами, описываемые некоторыми уравнениями в частных производных. Соответствующие им функции состояния чаще всего зависели от двух переменных – времени и пространственной координаты, которые меняются независимо друг от друга[[2]](#endnote-2). В стационарных системах две или даже три независимые переменные являются пространственными и характеризуют форму исследуемого объекта. Для описания таких систем необходимы некоторые сведения из ***векторного анализа*** – раздела математики, связанного с распространением методов и конструкций математического анализа на многомерный случай[[3]](#endnote-3).

Большинство описываемых в дальнейшем явлений связано с рассмотрением некоторых полей – электрических, гравитационных и др. Все они относятся к числу векторных полей. ***Векторное поле*** – это такое отображение, которое ставит в соответствие каждой точке пространства вектор с началом в этой точке[[4]](#endnote-4). Пусть рассматривается трехмерное евклидово пространство, в котором точка представляет собой трехмерный вектор **r** *=* (*x*,*y*,*z*). Тогда векторное поле характеризуется некоторой вектор-функцией



Данное равенство можно также записать в виде



где**i**, **j**, **k** *–* ***единичные векторы*** (орты), т.е. **i**=(1,0,0), **j**=(0,1,0), **k**=(0,0,1). В физике рассматривается значительное количество векторных величин, например, сила, скорость, ускорение и т.д. В частности, ***силовые поля***, характеризуемое вектором силы **F**. Так, электростатическое поле характеризуется электростатической силой, а гравитационное поле определяется гравитационной силой.

Укажем простейший способ определения векторного поля исходя из заданной в пространстве скалярной дифференцируемой функции многих переменных. ***Градиентом*** дифференцируемой функции многих переменных являетсявектор, компонентами которого являются соответствующие частные производные[[5]](#endnote-5). Рассмотрим дифференцируемую функцию *u = u*(*r*) *= u*(*x*,*y*,*z*). Тогда ее градиентом будет вектор-функция[[6]](#endnote-6)



Данное равенство можно также записать в виде



В физике часто рассматриваются поля, определяемые градиентом некоторой скалярной функции. Так например, согласно закону Фурье тепловой поток характеризуется равенством   
*q =*–*λ*∇*u*, где *λ* – коэффициент теплопроводности, а *u* – температура. Аналогично, согласно закону Фика диффузионный поток определяется по формуле *q =*–*D*∇*u*, где *D* – коэффициент диффузии, а *u* – концентрация. Векторное поле *A* называется ***потенциальным***, если оно определяется градиентом некоторой скалярной величины *u*, называемой ***потенциалом***. Таким образом, поля теплового и диффузионного потоков являются потенциальными.

Рассмотрим векторное поле **A**, определяемое потенциалом *u*. Тогда, справедливо равенство **A** *=* ∇*u*, что соответствует следующей системе равенств



Если эти величины являются непрерывно дифференцируемыми функциями, то смешанные производные от функции *u* не зависят от порядка дифференцирования. К примеру, смешанную производную *uyz*можно в раной степени интерпретировать и как производную от **A***z* по *y*, и как производную от **A***y* по *z*. В результате получаем равенства



Как отмечалось в предшествующей главе, вектор-функция, компонентами которой являются левые части последних равенств, называется ***ротором*** векторного поля. Таким образом, роторомвекторного поля**A**называется вектор



Согласно предшествующим равенствам, для потенциального векторного поля ротор равен нулю в любой точке[[7]](#endnote-7). Так, согласно уравнениям Максвелла, в стационарном случае ротор напряженности электрического поля равен нулю. Таким образом, электростатическое поле оказывается потенциальным, см. Раздел 4. В силовых физических полях условие потенциальности поля означает, что работа при мгновенном перемещении частицы, на которую действует поле, по замкнутому контуру равенства нулю.

Определим две важных процедуры над векторами. Пусть заданы два вектора **a***=*(*a*1,*a*2,*a*3) и**b***=*(*b*1,*b*2,*b*3). ***Скалярным произведением* a**⋅**b**этих векторов называется сумма произведений их компонент. При этом справедливо равенство **a**⋅**b** *=ab*cos*θ*, где *a* – ***модуль вектора*** **a**, см. Рис. 14.1*a*. ***Векторным произведением* a**×**b**этих векторов называется вектор, перпендикулярный обоим векторам, [длина](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%BE%D0%B4%D1%83%D0%BB%D1%8C_%D0%B2%D0%B5%D0%BA%D1%82%D0%BE%D1%80%D0%B0) которого равна площади параллелограмма, образованного исходными векторами, а выбор из двух направлений определяется так, чтобы тройка из по порядку стоящих в произведении векторов и получившегося вектора была правой[[8]](#endnote-8). Это означает, что с конца вектора **a**×**b**кратчайший поворот от вектора **a** к вектору**b**виден наблюдателю против часовой стрелки, см. Рис. 14.1*b*.



Рис. 13.1. Скалярное и векторное произведение векторов.

Отметим, что ротор векторного поля **A**=(*A*1,*A*2,*A*3) может быть записан в виде векторного произведения, а также определителя:

**

где в правой части находится определитель соответствующей матрицы. Отметим также еще одно равенство, связывающее ротор и градиент со скалярным и векторным произведением[[9]](#endnote-9)



Для определения еще одного важного понятия векторного анализа рассмотрим одну задачу гидродинамики[[10]](#endnote-10). Рассмотрим движение некоторой жидкости. Ее можно описать с помощью ***поля скоростей***, сопоставляя каждой точке рассматриваемого объема, вектор скорости **v** частиц потока жидкости в этой точке. Пусть *S* есть некоторая поверхность, ограничивающая какую-то часть объема, заполненного жидкостью, а *dS* – сколь угодно малый элемент этой поверхности.

Попытаемся оценить количество жидкости, протекающее через данную поверхность. Движение жидкости через эту поверхность характеризуется проекцией v*n* ее скорости **v** на направление нормали к этой поверхности. В частности, за время *dt* через площадку *dS* пройдет жидкость, отстоящая от нее на расстоянии *vndt* и заполняющая объем *vndtdS*. Таким образом, за указанное время через данную площадку пройдет жидкость с объемом *dV*=*vndtdS*. Тем самым объем жидкости, которая пройдет в единицу времени через площадку *dS* равен *d*Ф=*vndS*. В результате находим количество жидкости, проходящее через единицу времени через поверхность *S*, будет равно поверхностному интегралу



Очевидно, нормальная составляющая вектора скорости равна **v***n* = *vn***n** *= v*cos*θ* **n,** где **n**– единичный вектор ***нормали*** к поверхности *dS*, а *θ* – угол между направлениями векторов **v** и **n**,см. Рис. 13.2. Учитывая, что **n** есть единичный вектор, последнее равенство можно записать в виде **v***n* *= vn*cos*θ* **n**,что является скалярным произведением векторов **v**и **n**. Таким образом, находим





Рис. 13.2. Движение жидкости через поверхность.

Величина Ф называется потоком поля скоростей через поверхность *S*. В общем случае ***потоком векторного поля*** **A** через поверхность *S* называется интеграл



Рассмотрим некоторую точку и опишем вокруг нее некоторую поверхность Δ*S*. Определим отношение потока векторного поля ΔФ через эту поверхность к объему Δ*V*, ограниченного данной поверхностью. Предел данного отношения



называется ***дивергенцией*** векторного поля **A**. Можно показать, что дивергенция характеризуется равенством[[11]](#endnote-11)



Это равенство можно также записать в виде скалярного произведения div**A**= ∇⋅**A**.

Для прояснения смысла дивергенции обратимся уравнению для напряженности **E** электрического поля div**E** *=* 4*πρ*/*ε*, где *ρ* – плотность зарядов, а *ε* – диэлектрическая постоянная, см. уравнения Максвелла, Глава 12. Тогда дивергенция напряженности электрического поля характеризует плотность зарядов. В общем случае, можно сказать, что дивергенция векторного поля представляет собой плотность распределения источников поля.

Векторное поле *A* является ***соленоидальным***, если div**A**= 0. В частности, в отсутствие электрических зарядов справедливо равенство div**E** *=* 0, и электрическое поле оказывается соленоидальным. Согласно уравнениям Максвелла напряженность магнитного поля удовлетворяет равенству div**H**= 0. Тем самым магнитное всегда является соленоидальным, а магнитных зарядов не существует.

Введенные понятия будут использоваться при описании различных полей рассматриваемых в дальнейшем.

***Широкий класс физических процессов характеризуется векторными полями.***

***Роток, поток и дивергенция являются характеристиками векторных полей.***

#### **2. Стационарный теплоперенос**

Рассматривается достаточно длинное и тонкое тело, находящееся под действием некоторого источника тепла, не меняющегося со временем и характеризуемого плотностью тепловых источников *F= F*(*x*), где *x* – пространственная координата, направленная вдоль тела. Требуется установить распределение температур *u=u*(*x*) при условии, что никаких других воздействий тело не испытывает.

В соответствии с описанной в предшествующих главах методике, выделяем некоторый участок [*х*,*х*+Δ*х*] по длине тела. Если бы тепловые источники не менялись по длине тела, то за счет их действия на данном участке выделилось бы количество тепла *Q=F*Δ*х.* При переменном источнике тепла это равенство имеет смысл лишь на сколь угодно малом участке *dx*, т.е. справедливо равенство *dQ=Fdx.* Тогда на участке [*х*,*х*+Δ*х*] выделяется следующее количество тепла



Как отмечалось в Главе 10, в неравномерно нагретом теле возникают тепловые потоки, направленные из более горячей области в более холодную. Для определенности выбираем направление теплового потока совпадающим с направлением координаты *x*. Тогда изменение количества тепла в выбранной области будет представлять собой разность между тепловым потоком, входящим в точку *х*, и тепловым потоком, выходящим из точки *х*+Δ*х*, что соответствует равенству

*Q*2 = *q*(*x*) – *q*(*х*+Δ*х*),

где *q*(*x*) – тепловой поток, соответствующий в данном случае количеству тепла[[12]](#endnote-12), проходящего через точку *x*.

В данном случае тепловой баланс в выбранном участке тела характеризуется равенством *Q*1 + *Q*2 = 0, т.е. в результате действия тепловых источников и тепловых потоков количество тепла на выбранном участке не меняется. Тогда после деления на Δ*х* получаем



Переходим здесь к пределу при Δ*х* → 0. Левая часть дает в результате значение производной от функции *q* со знаком «минус» в точке *x*, а в правой части в результате перехода к пределу с учетом теоремы о среднем получается *F*(*x*). Таким образом, приходим к соотношению

 (13.1)

В соответствии с законом Фурье (см. Глава 10) тепловой поток связан с температурой в соответствии с равенством



В результате соотношение (13.1) принимает вид

 (13.2)

Равенство (13.2) является уравнением теплопроводности для неоднородного тела под действием теплового источника в стационарном случае.

Следует отметить, что уравнение (13.2) может быть получено и другим способом. В Главе 10 рассматривался процесс переноса тепла в одномерном теле под действием тепловых источников. Он описывается обычным (нестационарным) уравнением теплопроводности

 (13.3)

где *c* – теплоемкость, *ρ* – плотность. Если характеристики процесса, т.е. коэффициенты уравнения, функция *F*, а также поведение системы на границе со временем не меняется, то система выходит в положение равновесия. По мере выхода в равновесное состояния производная от функции состояния по времени стремится к нулю. Тем самым положением равновесия для уравнения (13.3) оказывается решение уравнения (13.2).

Аналогичные рассуждения можно провести и в многомерном случае. В частности, в трехмерном случае неоднородное уравнение теплопроводности имеет вид



Если характеристики системы здесь не меняются со временем, то система выходит на стационар, а значит, производная от функции состояния системы стремится к нулю. В результате получаем равенство



Если рассматриваемое тело является однородным, то получаем уравнение

*uxx* + *uyy* + *uzz* = *f*,

где *f =* -*F/*. Учитывая определение оператора Лапласа Δ, приходим к соотношению

Δ*u = f*, (13.4)

которое называется ***уравнением Пуассона***. Оно представляет собой уравнение в частных производных, в котором независимыми переменными оказываются пространственные координаты. При отсутствии внешних источников тепла функция *F* обращается в нуль. Тогда   
соотношение (13.4) принимает вид

Δ*u =* 0, (13.5)

и называется ***уравнением Лапласа***. Полученные соотношения оказываются простейшими уравнениями стационарного теплопереноса. Отметим, что уравнение Лапласа имеет многочисленные физические приложения (см. последующие разделы Главе), а также самостоятельный математический смысл[[13]](#endnote-13).

Как обычно, математическая модель системы, характеризуемой дифференциальными уравнениями, как обыкновенными, так и в частных производных, включает в себя также дополнительные граничные условия. Пусть рассматривается уравнение Пуассона или Лапласа в некоторой области Ω, ограниченной поверхностью *S*. В одномерном случае эта поверхность состоит из двух точек – концов отрезка Ω, в двумерном – замкнутая кривая, ограничивающая плоскую область Ω, а в трехмерном – поверхность, ограничивающая тело Ω.

В каждой точке области *S* может быть задано значение функции состояния

*u*(*x*) *= ϕ*(*x*), *x*∈*S*, (13.6)

где *ϕ* – известная функция, определенная на *S* и имеющая смысл температуры на границе. Уравнение Лапласа или Пуассона с этим условием составляют ***задачу Дирихле***. Второй важнейшей краевой задачей является ***задача Неймана***[[14]](#endnote-14), где на границе задается тепловой поток, характеризуемый некоторой функцией ψ. Это соответствует граничному условию

 (13.7)

в левой части которого находится производная по внешней нормали к поверхности *S*, см. Рис. 13.3. В зависимости от физического смысла задачи возможны и другие типы краевых условий. Кроме того, допустимы и смешанные граничные условия, при которых, например, на одной части границы задается условие первого рода, а на другой – второго.

Описанные краевые задачи называются ***внутренними*** поскольку рассматриваются процессы, протекающие внутри рассматриваемой области. Имеют смысл и ***внешние краевые задачи***,в которых исследуется поведение системы вне данной области[[15]](#endnote-15) (см. Рис. 13.3).



Рис. 13.3. Внутренняя и внешняя задачи.

**Задание 13.1. Метод конечных разностей для модели стационарного теплопереноса.** Рассматривается уравнение *uxx* = sin*x* на отрезке [0,*π*] с однородными граничными условиями. Выполнить следующие действия.

1. Найти аналитическое решение данной краевой задачи.
2. Записать конечно-разностную схему для рассматриваемой задачи.
3. Разработать алгоритм решения задачи в соответствии с методом прогонки.
4. Провести расчеты для различных значениях параметра **.
5. Дать физическую интерпретацию полученным результатам.
6. Дать оценку погрешности решения задачи в зависимости от числа точек разбиения заданного отрезка.

***Стационарный теплоперенос для однородного тела характеризуется уравнением Пуассона.  
В отсутствии тепловых источников система описывается уравнением Лапласа.***

***Важнейшими краевыми задачами для этих уравнений являются задачи Дирихле и Неймана.***

#### **3. Сферические и цилиндрические координаты**

При решении конкретных задач в ряде случаев имеет смысл перейти от декартовых координат к каким-либо другим. Чаще всего применяются сферические и цилиндрические координаты.

Для перехода к ***сферическим координатам*** выполняется следующее преобразование независимых переменных:



Сферические координаты включают в себя радиальную составляющую *r* – расстояние от данной точки до начала координат и два угла *θ* и *ϕ*, см. Рис. 13.4.

Запишем оператор Лапласа в сферических координатах. Для этого найдем производную





Рис. 13.4. Переход к сферическим координатам.

Аналогичным образом находятся производные по другим независимым переменным, а затем – и вторые производные. В результате установим вид оператора Лапласа в сферических координатах



Таким образом, уравнение Пуассона в сферических координатах записываются следующим образом:

 (13.8)

***Цилиндрические координаты*** задаются преобразованиями



Они характеризуются декартовой координатой *z*, направленной по оси цилиндра, координатой *r*, соответствующей расстоянию от данной точки до оси цилиндра, и угловой координаты *ϕ*, см. Рис. 13.5.



Рис. 13.5. Переход к цилиндрическим координатам.

Оператор Лапласа в цилиндрической системе координат записывается следующим образом:

.

Тогда уравнение Пуассона в цилиндрических координатах характеризуется соотношением

 (13.9)

В частности, в двумерном случае отсутствует ось *z* и цилиндрические координаты превращаются в ***полярные***. Соответствующее уравнение Пуассона имеет вид



Возникает естественный вопрос, какой смысл переходить от достаточно простого уравнения Пуассона в декартовых координатах (13.4) к существенно более громоздким уравнениям с переменными коэффициентами (13.8) и (13.9)? Ответ на этот вопрос прояснят ниже следующие задания, заключительные разделы данной Главе, а также рассматриваемая в Приложении задача Дирихле для уравнения Лапласа в круге.

**Задание 13.2. Стационарное поле температур в шаре**. Рассматривается однородный шар в отсутствии внешних источников тепла, на границе которого поддерживается постоянная температура. Записать математическую модель системы с учетом сферической симметрии, т.е. зависимости температуры в произвольной точке тела исключительно от расстояния от этой точки до центра шара.

***Если система обладает некоторым типом симметрии***,  
***то имеет смысл перейти от декартовой системы координат   
к другой, согласованной с данным типом симметрии.***

#### **4. Электростатическое поле**

Рассмотрим электростатическое поле[[16]](#endnote-16). Как отмечалось в Главе 12, напряженность **E** электрического поля удовлетворяет равенству

div**E** *=* 4*πε* -1*ρ*,

где *ρ* – плотность заряда, *ε* – диэлектрическая постоянная. Для описания поля вводится новая скалярная функция состояния, называемая ***потенциалом электростатического поля*** *u* и связанная с напряженностью соотношением

**E** *=* –∇*u*.

Подставляя значение напряженности поля в предшествующее равенство, получаем

div∇*u =* –4*πε* -1*ρ*.

Очевидно, дивергенция от градиента дает оператор Лапласа. В результате приходим к соотношению

Δ*u* = –4*πε* -1*ρ*.

Таким образом, потенциал электростатического поля будет удовлетворять уравнению Пуассона. При отсутствии зарядов приходим к уравнению Лапласа

Δ*u* = 0.

В качестве примера рассмотрим электростатическое поле, создаваемое зарядом, сосредоточенным в некоторой точке. Выбираем эту точку в качестве начала координат. Будем полагать, что окружающая среда является однородной. Тогда электростатическое поле будет обладать сферической симметрией, т.е. потенциал поля в конкретной точке зависит исключительно от расстояния от этой точки до начала координат, где располагается заряд. Следовательно, любая сферическая поверхность с центром в начале координат будет ***эквипотенциальной поверхностью***, т.е. характеризоваться одним и тем же значением потенциала. В этой связи воспользуемся уравнением Лапласа в сферической системе координат. Согласно соотношению (13.8) получаем



В силу сферической симметрии функция *u* не зависит от угловых координат *θ* и *ϕ*, а значит, ее производные по угловым координатам равны нулю. В результате получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

 (13.10)

Интегрируя это равенство, будем иметь



где *с*1 – произвольная постоянная. Выполняя повторное интегрирование, находим функцию

 (13.11)

где *с*2 – некоторая константа.

Формула (13.11) дает общее решение уравнения (13.10). Для получения искомого частного решения следует задать некоторую дополнительную информацию. Прежде всего, отметим, что по мере удаления от рассматриваемого заряда электрическое поле ослабевает и должно сходить на нет на достаточно большом расстоянии от него. Это означает, что при *r*→∞ потенциал электрического поля должен стремиться к нулю[[17]](#endnote-17). Обеспечение этого свойства требует задания координаты *с*2 = 0. Учитывая положительность потенциала, заключаем, что константа *с*1 должна быть отрицательной. В частности, полагая *с*1 = –l, получаем равенство

. (13.12)

Формула (13.12) определяет потенциал поля, образованного единичным зарядом, расположенным в начале координат[[18]](#endnote-18). В общем случае значение константы *с*1 здесь определяется величиной заряда, создающего электрическое поле. Согласно полученным результатам, потенциал электрического поля точечного заряда в произвольной точке обратно пропорционален расстоянию от этой точки до заряда (см. Рис. 13.6). Приведенный пример показывает эффективность перехода к новым независимым переменным. Пользуясь сферической симметрией исследуемой системы, мы перешли от уравнения Лапласа с тремя пространственными координатами к обыкновенному дифференциальному уравнению (13.10). В результате было найдено решение рассматриваемой задачи в трехмерном случае.



Рис. 13.6. Потенциал поля точечного заряда.

Рассмотрим теперь электрическое поле, создаваемое тонким бесконечным равномерно заряженным проводом. В случае однородности электропроводящей среды потенциал поля вновь описывается уравнением Лапласа. Будем полагать, что декартова координата *z*   
направлена вдоль провода. Очевидно, потенциал поля равномерно заряженного провода будет изменяться одинаково в любом направлении от провода и остается неизменным на любом участке его длины. Таким образом, потенциал поля в произвольной точке зависит исключительно от расстояния от этой точки до провода. Следовательно, эквипотенциальными поверхностями в данном случае будут боковые поверхности всевозможных цилиндров, осью которых является рассматриваемый провод. В этой связи имеет смысл перейти к цилиндрическим координатам.

Согласно (13.9), уравнение Лапласа в цилиндрических координатах имеет вид



В силу цилиндрической симметрии системы производные от функции *u* по переменным *ϕ* и *z* равны нулю. В результате получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

 (13.13)

Интегрируя это равенство, получаем



где *с*1 – произвольная постоянная. Повторное интегрирование приводит к равенству

 (13.14)

где *с*2 – некоторая координата.

Формула (13.14) дает общее решение уравнения (13.13). Как и в случае исследования поля точечного заряда отметим, что потенциал поля должен убывать по мере удаления от провода и стремится к нулю при *r*→∞. Это приводит к равенству *с*2 = 0. Конкретное значение параметра *с*1 зависит от заряда провода, а точнее его плотности заряда, т.е. заряда единицы его длины. В частности, полагая при этом *с*1 = -l , получаем равенство

 (13.15)

характеризующее потенциал электрического поля, образованного проводом единичной плотности заряда[[19]](#endnote-19). Согласно полученным результатом потенциал убывает с ростом расстояния от провода (см. Рис. 13.7).



Рис. 13.7. Изменение потенциала поля бесконечного провода.

Как и в предшествующем случае в результате перехода к новым независимым переменным удалось существенно упростить вид математической модели, получив обыкновенное дифференциальное уравнение (13.13). На практике замену переменных проводят также и при отсутствии ярко выраженной симметрии с целью получения задачи в области более простой структуры.

***Потенциал электростатического поля описывается уравнением Лапласа.  
Потенциал поля точечного заряда находится с помощью сферических координат.  
Потенциал поля бесконечного провода находится с помощью цилиндрических координат.***

#### **5. Гравитационное поле**

Рассматривается гравитационное поле[[20]](#endnote-20). Согласно ***закону всемирного тяготения Ньютона*,** сила взаимодействия двух тел прямо пропорциональна массам этих тел и обратно пропорциональна расстояния между ними. Поместим второе тело в начало координат, а положение первого тела относительно второго будем характеризовать вектором **r**. Учитывая, что сила является векторной величиной, приходим к равенству



где **F** *–* соответствующая сила, *M* и *m* *–* массы тел, *G* *–* гравитационная постоянная, а **e** *–* вектор единичной длины, направленный от первого тела ко второму. Очевидно, справедливо равенство  Таким образом, предшествующее равенство принимает вид

 (13.16)

Согласно второму закону Ньютона, ускорение, которое приобретает первое тело под действием гравитационной силы, характеризуется равенством **F***=M***a**. В результате, учитывая формулу (13.16), находим ускорение первого тела относительно второго

 (13.17)

Отметим, что результат не зависит от массы первого тела, т.е. все тела под действием гравитационной силы приобретают одно и то же ускорение. Формула (13.17) задает поле ускорений гравитационной силы, определяемое точечным телом массы *m*.

Окружим тело, генерирующее гравитационное поле, сферической поверхностью *S* радиуса *R*, см. Рис. 13*.*8. Как отмечалось ранее, поток поля определяется по формуле



Отметим, что ускорение тела направлено к источнику гравитационного поля, в то время как внешняя нормаль к сферической поверхности направлена в противоположную сторону, см. Рис. 13*.*8. Таким образом, угол *θ* равен 2*π*, а значит,  Учитывая, что нормаль является вектором единичной длины, получаем



в силу равенства (13.17). В результате получаем



поскольку расстояние от любой точки сферической поверхности до ее центра равна радиусу сферы. Под интегралом здесь мы имеем площадь сферической поверхности, которая равна 4*πR*2. В результате приходим к формуле

Ф = 4*πGm*,

справедливой для любой сферической поверхности, ограничивающей тело массой *m*, генерирующее гравитационное поле. Находим отношение



где *V* есть объем, ограниченный поверхностью *S*. Отношение массы тела к его объему дает значение средней плотности. Тогда, переходя к пределу, когда объем сжимается в точку, с учетом определения дивергенции получаем значение div**a**. Предел отношения массы к объему дает значение плотности *ρ*. В результате приходим к соотношению

div**a** = 4*πGρ*. (13.18)



Рис. 13.8. Сфера, окружающая частицу.

Для дальнейшего преобразования полученного результата обратимся к задаче о падении тела под действием своего веса, рассмотренной в Главе 1. Потенциальная энергия тела определяется по формуле *U = mgx*, где *x* – вертикальная координата тела, а *g* – ускорение свободного падения. Вес тела определяется по формуле *F=*–*mg*,где знак "минус" объясняется тем, что направление силы и вертикальная координата направлены в противоположную сторону. Из двух последних равенств следует соотношение



В общем случае энергия *U* связана с силой **F** с помощью формулы[[21]](#endnote-21)

**F***=*–∇*U.* (13.19)

Для падающих тел характерно, что отношение потенциальной энергии к массе тела определяется исключительно высотой тела над поверхности земли, т.е. характеристикой гравитационного поля в точке *х*. Эта величина *u=gx*, и называется потенциалом гравитационного поля. В общем случае ***потенциал гравитационного*** поля связан с потенциальной энергией тела, имеющего массу *m*, с помощью равенства *U=mu.* Тогда формула (3.19) принимает вид **F***=*–*m*∇*u.*

Согласно второму закону Ньютона, справедливо равенство **F***=m***a**. Тогда из предшествующего равенства следует **a***=*–∇*u.* Подставляя это выражение в формулу (13.18), находим

div**a** *=* –div∇*u =* 4*πGρ*.

Поскольку дивергенция от градиента представляет собой оператор Лапласа, получаем

Δ*u =* 4*πGρ*. (13.20)

Итак, потенциал гравитационного поля удовлетворяет уравнению Пуассона.

Отметим аналогию между характеристиками электростатического и гравитационного полей, представленное в Таблице 13.1.

Таблица 13.1. Аналогия между электростатическим и гравитационным полями.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **характеристика** | **электростатика** | **гравитация** |
| поле | электростатическое поле | гравитационное поле |
| источник | заряд *q* | масса *m* |
| сила взаимодействия | электрическая сила **F** | гравитационная сила**F** |
| константа взаимодействия | диэлектрическая постоянная*ε* | гравитационная постоянная *G* |
| закон взаимодействия | закон Кулона | закон всемирного тяготения |
| формула силы |  |  |
| напряженность поля | напряженность поля **E** | ускорение **a** |
| свойство среды | плотность заряда *ρ* | плотность *ρ* |
| формула дивергенции | div**E** = 4*πε*-1*ρ* | div**a** *=* 4*πGρ* |
| потенциал поля | потенциал электрического поля *u* | потенциал гравитационного поля *u* |
| формула градиента | **E** *=* –∇*u* | **a** *=* –∇*u* |
| уравнение Пуассона | Δ*u =* 4*πε*-1*ρ* | Δ*u =* 4*πGρ* |

**Задание 13.3. Гравитационное поле материальной точки**. Рассматривается гравитационное поле, генерируемое материальной точкой. Выполнить следующие действия.

1. Записать уравнение Пуассона (13.20) в сферической системе координат.

2. Учитывая сферическую симметрию, свести полученное соотношение к обыкновенному дифференциальному уравнению.

3. Найти решение полученного уравнения с учетом того, что потенциал поля стремится к нулю по мере удаления от его источника.

4. Дать физическую интерпретацию полученных результатов.

5. Установить влияние плотности на полученные результаты.

***Гравитационное поле является потенциальным.***  
***Потенциал гравитационного поля описывается уравнением Пуассона.***

**Направление дальнейшей работы**. В Приложении рассматривается установившееся течение несжимаемой жидкости. В последующей Главе мы займемся анализом неустановившегося течения жидкости, т.е. задачами гидродинамики.

### **ПРИЛОЖЕНИЕ**

Ниже мы рассмотрим еще один пример физической системы, описываемой уравнением Лапласа. Речь идет об установившемся течении несжимаемой жидкости. Кроме того, рассматриваются математические модели физических процессов, описываемые другими стационарными системами. В частности, задача об установившихся колебаниях различных систем с распределенными параметрами характеризуется уравнением Гельмгольца, являющимся некоторым обобщением уравнения Пуассона. Анализ изгиба тонкой упругой пластины приводит к бигармоническому уравнению, представляющему собой уравнение в частных производных четвертого порядка.

Мы рассмотрим также простейшие качественные и количественные методы решения стационарных систем. Так, для задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге применяется метод разделения переменных, использованный ранее для исследования нестационарных систем с распределенными параметрами. Для приближенного решения рассматриваемых задач может быть использован метод установления, который основан на интерпретации исследуемой краевой задачи как положения равновесия некоторой нестационарной системы.

#### **6. Стационарное течение жидкости**

Рассмотрим некоторые задачи, связанные с движением жидкости в пространстве. Оно характеризуется плотностью *ρ* вектором скорости *v*, которые связаны ***уравнением неразрывности***[[22]](#endnote-22)



В стационарном случае получаем равенство

div*ρv* = 0.

Если жидкость является несжимаемой, то ее плотность постоянна, а уравнение неразрывности принимает вид

div*v* = 0,

т.е. поле скоростей установившегося течения несжимаемой жидкости является соленоидальным.

Для описания стационарного течения несжимаемой жидкости вводят новую функцию состояния, которая обозначается через *u*, называется ***потенциалом поля скоростей*** и связана со скоростью соотношением *v =* –∇*u*.Подставляя это значение в уравнение неразрывности, будем иметь

div∇*u* = 0.

Учитывая, что дивергенция от градиента представляет собой оператор Лапласа, заключаем, что потенциал поля скоростей для стационарного течения несжимаемой жидкости удовлетворяет уравнению Лапласа

Δ*u* = 0.

**Задание 13.4. Стационарное течение жидкости в трубе**. Рассматривается стационарное течение несжимаемой жидкости в бесконечно длинной трубе. Выполнить следующие действия.

1. Записать математическую модель рассматриваемого процесса, учитывая, что через стенки трубы жидкость не проходит.

2. Подобрать систему координат, наиболее подходящую для данного случая и дать постановку задачи в этой системе координат.

3. Упростить постановку задачи, исходя из симметрии.

4. Проанализировать полученную модель.

5. Дать физическую интерпретацию полученным результатам.

#### **7. Установившиеся колебания**

Определим еще одно уравнение стационарных систем. Рассматривается неоднородное волновое уравнение

*utt*= *a*2Δ*u* + *F*, (13.21)

описывающее вынужденные механические, электромагнитные или звуковые колебания, см. Глава 12.

Предположим, что функция *F* является периодической во времени, в частности, *F = f*sin*ωt*, где *f –* функция пространственных переменных. Решение уравнения (13.21) будем искать в виде *u=v*sin*ωt*, где *v –* функция пространственных переменных. Тем самым мы будем рассматривать ***установившиеся колебания***, т.е. колебания с частотой вынужденных колебаний. Подставляя это значение в равенство (13.21), будем иметь

*–ω*2*v*sin*ωt* = *a*2Δ*v* sin*ωt* + *f*sin*ωt*.

Таким образом, функция *v* удовлетворяет соотношению

*a*2Δ*v* +*ω*2*v*+ *f* = 0, (13.22)

называемому ***уравнением Гельмгольца***. Итак, анализ установившихся колебаний приводит к необходимости анализа уравнения Гельмгольца[[23]](#endnote-23).

#### **8. Изгиб тонкой упругой пластины**

В Главе 12 говорилось о том, что колебание упругой балки описывается уравнением четвертого порядка

*utt* + *a*2*uxxхх* = 0,

где функция *u* характеризует отклонение балки от положения равновесия. В случае жесткого закрепления концов балки *x=*0 и *x=L* это уравнение пополняется граничными условиями

*u*(0,*t*) = 0,  *uх*(0,*t*) = 0, *u*(*L*,*t*) = 0,  *uх*(*L*,*t*) = 0,

а также соответствующими начальными условиями.

Двумерным аналогом этой задачи является процесс колебания тонкой упругой пластины, который описывается следующим уравнениям



Выражение в круглых скобках здесь соответствует двукратному применению оператора Лапласа для двумерного случая и обозначается через Δ2. Таким образом, получается уравнение

*utt* + *a*2Δ2*u =* 0.

Двумерным аналогом приведенных выше граничных условий является равенство нулю рассматриваемой функции и ее нормальной производной на границе *S* данной пространственной области. В результате получаем граничные условия



соответствующие закреплению пластины на границе.

Математическая модель пополняется также начальными условиями, характеризующими начальное положение пластины и распределение ее скорости в начальный момент времени. Очевидно, если эти значения тождественно равны нулю, то пластина будет находиться в состоянии равновесия, т.е. колебания будут отсутствовать.

Предположим теперь, что на пластину действует постоянная внешняя сила, распределенная по некоторому закону *f = f*(*x*,*y*). В этом случае уравнение колебания пластины окажется неоднородным и примет вид

*utt* + *a*2Δ2*u = f*.

А теперь зададимся вопросом, какую форму будет иметь пластина под действием указанной силы, находясь в равновесии? Для ответа на этот вопрос следует приравнять нулю вторую производную по времени в приведенном выше соотношении. В результате получаем уравнение четвертого порядка

*a*2Δ2*u = f*,

которое рассматривается совместно с приведенными выше граничными условиями[[24]](#endnote-24).

#### **9. Метод разделения переменных для уравнения Лапласа в круге**

При анализе уравнений теплопроводности и колебания струны мы пользовались методом разделения переменных. Этот метод применим и для анализа стационарных систем[[25]](#endnote-25). Рассмотрим уравнение Лапласа

*uxx* + *uyy* = 0 (13.23)

в круге радиуса *r*,на границе *S* которого задано некоторая функция *f*. Таким образом, решается задача Дирихле, состоящая из уравнения (13.23) с граничным условиям

*u*(*x*,*y*) = *f*(*x*,*y*), (*x*,*y*)∈*S*. (13.24)

Непосредственное применение метода разделения переменных здесь затруднительно, поскольку в граничном условии переменные *x* и *y* зависят друг от друга. Вследствие этого перейдем к полярным координатам в соответствии с равенствами

*x = ρ*cos*ϕ*, *y = ρ*sin*ϕ.*

В новых переменных уравнение Лапласа (13.23) имеет вид

 (13.25)

Граничное условие (13.24) записывается следующим образом

*u*(*r*,*ϕ*) = *g*(*ϕ*), 0<*ϕ* <2*π*, (13.26)

где *g*(*ϕ*)=*f*(*r*cos*ϕ*, *r*sin*ϕ*).

Согласно ***методу разделения переменных*** решение задачи (13.25), (13.26) ищется в виде

*u*(*ρ*,*ϕ*) = *R*(*ρ*)Ф(*ϕ*).

В результате после деления на *R*Ф/*ρ*2, получаем



Данное равенство возможно, если его левая и правая части представляют собой некоторую константу, обозначаемую через *–λ*. Таким образом, получаем два обыкновенных дифференциальных уравнения

Ф" + *λ*Ф = 0, (13.27)

 (13.28)

Учитывая, что, поворот круга на угол 2*π* ничего не меняет, установим, что соотношения (13.25), (13.26) пополняются условием периодичности

*u*(*ρ*,*ϕ*) = *u*(*ρ*,*ϕ+*2*π*).

Тогда для уравнения (13.27) получим периодическое граничное условие

Ф(*ϕ*) = Ф(*ϕ+*2*π*). (13.29)

Очевидно, задача (13.27), (13.29) имеет нетривиальное решение исключительно при *λ=k*, где *k –* произвольное натуральное число. При этом соответствующее решение равно

Ф*k*(*ϕ*) =*ak*cos*kϕ* + *bk*sin*kϕ*,

где *ak* и *bk –* произвольные константы. Общее решение уравнения (13.28) при *λ=k* есть

*Rk*(*ρ*) = *ckρk* + *dkρ -k*, (13.30)

где *ck* и *dk –* произвольные константы.

Отметим, что по мере приближения к центру круга функция *Rk* стремится к бесконечности, а значит, аналогичным свойством будет обладать и произведение *Rk*Ф*k*. Во избежание этого полагаем параметр *dk* равным нулю. В результате находим функцию

*uk = Rk*Ф*k =* (*αk*cos*kϕ* + *βk*sin*kϕ*)*ρk*,

где *αk=akck*, *βk=bkck*. Найденная функция удовлетворяет уравнению (13.25), является периодической функцией угловой координаты и не имеет особенностей при *ρ=*0 для любого номера *k* и любых констант *αk* и *βk*. Аналогичным свойством обладает и их сумма

 (13.31)

Остается подобрать здесь параметры *αk* и *βk* таким образом, чтобы обеспечить выполнение граничного условия (13.26). Полагая в формуле (13.31), *ρ=r*, имеем



Из теории рядов Фурье известно, что функцию *g* можно представить следующим образом



где



Сравнивая имеющиеся ряды, находим коэффициенты



Итак, решение задачи (13.25), (13.26) определяется по формуле (13.31) с коэффициентами Фурье, определенными указанным выше способом.

**Задание 13.5. Внешняя задача Дирихле для уравнения Лапласа в круге**. Провести исследование внешней задачи Дирихле в круге. Выполнить следующие действия

1. Найти решение задачи в соответствие с методом разделения переменных. При этом обратить внимание на свойства функции *Rk* при неограниченном возрастании аргумента *ρ*.
2. Найти решение задачи с граничным условием *u*(*r*,*ϕ*) = cos 2*ϕ*
3. Подставив найденное значение в уравнение и граничное условие, убедиться, что это действительно есть решение задачи.
4. Установить поведение системы с ростом переменного *ρ*.
5. Установить влияние радиуса круга на полученные результаты.

#### **10. Метод установления для приближенного решения краевых задач**

Ранее уже многократно отмечалось, что нахождение аналитического решения дифференциальных уравнений является исключительным случаем. Рассмотрим один общий метод приближенного решения краевых задач для исследуемых уравнений. Как известно, решения краевых задач для уравнения Пуассона и других математических моделей стационарных систем могут быть получены как положения равновесия соответствующих нестационарных систем. Так, уравнение (13.2), являющееся одномерным аналогом уравнения Пуассона, с некоторыми краевыми условиями оказывается положением равновесия для уравнения теплопроводности (13.3) соответствующими краевыми условиями, см. Раздел 2.

Ранее были описаны приближенные методы решения последней задачи, в частности, метод конечных разностей. Если воспользоваться здесь явной разностной схемой (см. Глава 11), то в результате получается рекуррентная формула, позволяющая рассчитывать значение решение уравнения теплопроводности на текущим слое по времени по его известному значению на предшествующим шаге по времени. По отношении к исходной (стационарной) задаче шаги по времени нестационарной задачи соответствуют итерациям. В частности, считающееся известным начальное распределение искомой функции для уравнения теплопроводности соответствует начальной итерации алгоритма приближенного решения уравнение (13.2). Переходя от слоя к слою по времени в процессе решения уравнения теплопроводности, мы приближаемся к положению равновесия нестационарной системы в случае эффективности применяемого численного алгоритма[[26]](#endnote-26). Тем самым мы переходим от итерации к итерации, приближаясь к решению исходной задачи. Таким образом, в качестве приближенного решения исходной задачи может быть выбран результат соответствующей итерации алгоритма или, что то же самое, приближенное решение уравнения теплопроводности в достаточно большой момент времени.

Описанный способ решения краевой задачи для уравнение (13.2) представляет собой ***метод установления***[[27]](#endnote-27). Естественно, указанная задача достаточно проста, может быть решена более простым способом (см., например, Задание 13.1) и даже допускает аналитическое решение. Однако этот алгоритм, в принципе, применим для приближенного решения широкого класса стационарных систем, в том числе многомерных и даже нелинейных.

**Задание 13.6. Метод установления для неоднородной краевой задачи**. Рассматривается следующая краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

*uxx* = *f*(*x*), *x*∈(0,*L*), *u*(0) = *a*, *u*(*L*) = *b*,

где функция *f* и числа *L*, *a* и *b* известны. Выполнить следующие действия:

1. Записать краевую задачу для уравнения теплопроводностью, положением равновесия для которой является решение исходной задачи.
2. Записать явную разностную схему для решения полученного уравнения теплопроводности с соответствующими начальными и граничными условиями.
3. Составить программу для решения задачи на основе указанного алгоритма.
4. Провести расчеты в соответствии с разработанной программой до тех пор, пока различие между значениями функции на соседних слоях по времени не достигнут 1%.
5. Найти решения исходной краевой задачи на основе метода прогонки, как это делалось в Задании 13.1 при том же разбиении интервала (0,*L*) и тех же параметрах задачи.
6. Найти аналитическое решение исходной краевой задачи и сравнить с ним полученные ранее приближенные решения.

### **КОММЕНТАРИИ**

1. Как уже отмечалось ранее, уравнение

   *a*11*uxx* + 2*a*12*uxy* + *a*22*uyy* = *F*(*x*,*y*,*u*,*ux*,*uy*)

   при выполнении условия *a*122 – *a*11*a*22 < 0 называется ***эллиптическим***. Эллиптические уравнения, к которым относятся уравнения Пуассона и Лапласа, составляют третий тип уравнений математической физики. Свойства таких уравнений и методы их решения рассматриваются в любом курсе уравнений в частных производных, см., например, Farlow, Hor, Jost, Ladyz, Lions, Mikhlin, Pinch, Polyanin, Tihon, Vladim. [↑](#endnote-ref-1)
2. Впрочем, для рассмотренной в Главе 11 задачи Стефана пространственная область, в которой рассматривается процесс, меняется со временем. [↑](#endnote-ref-2)
3. Важнейшие понятия векторного анализа, в принципе, излагаются в любом курсе математического анализа, см., например, Apostol, Comen, Dunham, Howie, Larson, Telyak, Trench. Непосредственно вопросам векторного анализа посвящена книга Marsden. [↑](#endnote-ref-3)
4. ***Скалярное поле*** сопоставляет каждой точки рассматриваемой области значение некоторой скалярной функции. Таким образом, задание скалярного поля равносильно заданию функции многих переменных. Так, скалярными является поля температур, концентраций и др. Отметим также ***нестационарные поля***, характеристики которых меняются со временем. [↑](#endnote-ref-4)
5. Понятие градиента существенным образом используется в теории экстремума, указывая направление роста функции многих переменных, см. Глава 21. [↑](#endnote-ref-5)
6. Для обозначения градиента функции *u* используется также обозначение grad*u*. [↑](#endnote-ref-6)
7. Равенство нулю в каждой точке ротора векторного поля является необходимым, но не достаточным условием потенциальности поля. Отметим, что если рассматриваемая пространственная область не является ***односвязной***, то потенциал может оказаться многозначной функцией. Понятие односвязности относится к ***топологии*** и предполагает, что любая замкнутая кривая на нем может быть непрерывно стянута в точку, см., например, Kelley. В частности, сферическая поверхность односвязна, а поверхность тора – нет. [↑](#endnote-ref-7)
8. Для обозначения векторного произведения векторов *a* и *b* используется также обозначение [*a*,*b*]. [↑](#endnote-ref-8)
9. Приведенная формула будет использоваться в последующей Главе при описании движения идеальной жидкости. [↑](#endnote-ref-9)
10. Задачам гидродинамики посвящена Глава 14. [↑](#endnote-ref-10)
11. Для обоснования формулы для дивергенции проще всего в качестве объема Δ*V* выбрать параллелепипед со сторонами Δ*x*, Δ*y*,Δ*z.* Затем следует подсчитать явным образом интегралы от скалярного произведения *A*⋅*n* по каждой из его граней. Сумма этих интегралов дает величину ΔФ. Разделив ее на объем Δ*V =* Δ*x*Δ*y*Δ*z* и переходя к пределу при Δ*V* стремящемся к нулю получаем известное представление дивергенции. [↑](#endnote-ref-11)
12. Если бы мы рассматривали нестационарный процесс, то *q*(*x*) – количество тепла, проходящее в единицу времени, см. Глава 10. Если к тому же рассматривается многомерный случай, то речь идет о количестве тепла, проходящем в единицу времени через единичной сечение. [↑](#endnote-ref-12)
13. На важность уравнения Лапласа указывает, в частности, тот факт, что его решения имеют специальное название. Дважды непрерывно дифференцируемая в некоторой области функция, удовлетворяющая там уравнению Лапласа, называется ***гармонической функцией***. Свойства гармонических функций изучаются в теории уравнений математической физики, см., например, Mikhlin, Polyanin, Tihon, Vladim. Особое значение уравнение Лапласа имеет в ***теории функций комплексного переменного,*** см., например, Conway, В частности, центральным понятием этой теории является ***аналитическая функция***. Функция комплексного переменного *f=f*(*z*) = *u*(*x*,*y*) +*iv*(*x*,*y*) комплексного переменного *z* = *x*+*iy* является аналитической в некоторой области, если она представима там в виде сходящегося ряда Тейлора.Так вот, действительная и мнимая части аналитической функции *f*, т.е. функции *u* и *v* удовлетворяют уравнению Лапласа.Отметим также, краевые задачи для уравнений Лапласа и Пуассона появляются в вариационном исчислении как условия экстремума некоторых интегральных функционалов, см. Глава 16. [↑](#endnote-ref-13)
14. Задача Неймана для уравнения Пуассона обладает отличительными особенностями от задачи Дирихле, а также от рассмотренных ранее краевых задач для уравнения теплопроводности и колебания струны. Рассмотрим, к примеру, уравнение Лапласа в одномерном случае при однородных условиях Неймана. Таким образом, граничные условия предполагают равенство нулю производной искомой функции на левой и правой границе. Очевидно, любая константа оказывается решением этой задачи. Таким образом, решение однородной задачи Неймана для уравнения Лапласа имеет бесконечное множество решений, хотя количество краевых условий здесь в точности равно порядку уравнения. Рассмотрим теперь уравнение (13.2) с однородными условиями второго рода. Интегрируя данное равенства от нуля (левая граница) до *L* (правая граница) и учитывая граничные условия, получаем равенство

    

    Таким образом, если свободный член уравнения Пуассона, т.е. функция *F* не удовлетворяет приведенному выше равенству, то соответствующая однородная задача Неймана вообще не имеет решения. Тем самым в зависимости от сочетания параметров задача Неймана для уравнения Пуассона может оказаться как неразрешимой, так и имеющей неединственное решение. [↑](#endnote-ref-14)
15. Внешние краевые задачи возникают, например, при изучении обтекания некоторого тела потоком жидкости или газа. Такого типа задачи могут быть поставлены при описании стационарного течения жидкости, рассматриваемого в Приложении. [↑](#endnote-ref-15)
16. Задачи электростатики рассматриваются, например, в LandauF, Purcell, Tamm, Tipler. [↑](#endnote-ref-16)
17. Равенство искомой функции нулю на бесконечности фактически представляет собой граничное условие для уравнения, рассматриваемого в бесконечной области. [↑](#endnote-ref-17)
18. Формула (3.12) дает ***фундаментальное решение уравнения Лапласа в пространстве***. Оно используется например, для определения ***функции Грина*** при исследовании краевых задач для уравнения Пуассона, см., например, Mikhlin, Polyanin, Tihon, Vladim. [↑](#endnote-ref-18)
19. Формула (3.15) дает ***фундаментальное решение уравнения Лапласа на плоскости***. Оно используется например, для определения ***функции Грина*** при исследовании краевых задач для уравнения Пуассона в двумерном случае. [↑](#endnote-ref-19)
20. О гравитационном поле см. LandauF, Wheeler. [↑](#endnote-ref-20)
21. Указанная связь между силой и потенциальной энергией характерна для любого силового поля. [↑](#endnote-ref-21)
22. Уравнение неразрывности и другие аспекты гидродинамики рассматриваться в Главе 14. [↑](#endnote-ref-22)
23. К уравнению Гельмгольца приводится также задача о диффузии газа в условиях цепной реакции в установившимся режиме, см. Tihon. Свойства уравнения Гельмгольца рассматриваются, например, в Riley. [↑](#endnote-ref-23)
24. В отсутствии внешней силы получаем соотношение Δ2*u =* 0, называемое ***бигармоническим уравнением***. Его четырежды непрерывно дифференцируемое решение называется ***бигармонической функцией***. [↑](#endnote-ref-24)
25. Метод Фурье и другие методы решения рассматриваемых уравнений, в частности, вариационный метод, методы Галеркина, Ритца, функций Грина описывается в указанной ранее литературе по теории уравнений в частных производных. [↑](#endnote-ref-25)
26. Вспоминаем здесь, что что явная разностная схема для уравнения теплопроводности эффективна при выполнении условия устойчивости, см. Глава 11. [↑](#endnote-ref-26)
27. Идею ***метода установления*** проще всего изложить на примере приближенного решения ***нелинейных алгебраических уравнений***. Пусть требуется найти решение алгебраического уравнения *f*(*x*) = 0, где функция *f* является достаточно сложной, так что нахождение аналитического решения уравнения не представляется возможным. Очевидно, если число *x* является решением этого алгебраического уравнения, то оно оказывается положением равновесия для дифференциального уравнения  Это уравнение можно решить приближенно с помощью метода Эйлера. При этом, заменяя производную от функции *x= x*(*t*)в произвольной точке *tk* соответствующей разностью, получаем

    

    где параметр *τ* имеет смысл шага по времени и является параметром алгоритма. В результате получается рекуррентная формула

    *xk*+1 = *xk* + *τf*(*xk*),

    где *xk* = *x*(*tk*). Последнее равенство можно интерпретировать как ***итерационный процесс*** для решения исходного алгебраического уравнения. При этом значение *x*0, соответствующее начальному значению для дифференциального уравнения, по отношению к исходному алгебраическому уравнению интерпретируется как начальное приближение. Предположим теперь, что определенная таким способом последовательность {*xk*} при неограниченном росте номера итерации *k* сходится к некоторому значению *x*. Тогда при условии непрерывности функции *f* в результате перехода к пределу в приведенной рекуррентной формуле получаем равенство *x*=*x*+*τf*(*x*), а значит, *f*(*x*)=0 вне зависимости от параметра *τ*. Таким образом, приведенный выше алгоритм в случае его сходимости гарантирует нахождение решения рассматриваемого алгебраического уравнения. Тем самым в качестве его приближенного решения может быть выбрано значение *xk* при достаточно большом номере итерации *k*. [↑](#endnote-ref-27)